Katholische Universität
Eichstätt-Ingolstadt

Mathematisch-Geographische Fakultät
Günther J. Wirsching

Klassische Logik und Quantenlogik

In der renommierten Fachzeitschrift *Annals of Mathematics*, die Beiträge aus praktisch allen Teilgebieten der Mathematik veröffentlicht, erschien im Oktober 1936 ein Artikel mit dem Titel "The Logic of Quantum Mechanics" von den Autoren Garrett Birkhoff (1911–1996) und John von Neumann (1903–1957) [4]. Damit war die Quantenlogik geboren – um zunächst für paar Jahrzehnte in eine Art Dornröschenschlaf zu verfallen. Anfang der 1960er Jahre wuchs das Interesse an den im Artikel initiierten algebraischen Strukturen, wobei die ursprüngliche physikalische und logische Motivation in den Hintergrund geriet (vgl. [12]). Seit etwa zwei Jahrzehnten erfreut sich die Quantenlogik eines zunehmenden Interesses: Betrachtet man die Entwicklung der Zitatzahlen für diesen Aufsatz bei Google Scholar, dann findet man im Jahr 1999 einen deutlichen Sprung nach oben. Dieses neue Interesse kommt vor allem aus Fächern wie Linguistik, Psychologie [1, 5] und Ingenieurwissenschaften [13], wo die Möglichkeit der mathematischen Modellierung kognitiver Prozesse mit Hilfe der Quantenlogik interessant ist. Z. B. publizierte das *Journal of Mathematical Psychology* 2009 einen Sonderband (Vol. 53) mit dem Titel "Quantum Cognition and Decision".

Der Artikel selbst ist nach der "Introduction" in drei Hauptteile gegliedert:

I. Physical Background (sec. 2–6),

II. Algebraic Analysis (sec. 7–14),

III. Conclusions (sec. 15–18),

woran sich ein sechsseitiger Anhang, der in acht Paragraphen unterteilt ist, anschließt. Das wesentliche Thema ist den Autoren zufolge die Suche nach einem der Logik quantenmechanischer Experimente angemessenen Logikkalküls, mit dem folgenden Ergebnis:

> "Our main conclusion, based on admittedly heuristic arguments, is that one can reasonably expect to find a calculus of propositions which is formally indistinguishable from the calculus of linear subspaces with respect to *set products*, *linear sums*, and *orthogonal complements*—and resembles the usual calculus of propositions with respect to *and*, *or*, and *not*." [4, sec. 1]

Dieser Beitrag untersucht Argumente für diese Schlussfolgerung im Artikel und verbindet sie mit ihren historischen Vorbedingungen und Auswirkungen in der wissenschaftlichen Welt. Analysiert werden insbesondere die Beziehungen

$$\begin{array}{lcl} \textit{set product} & \longleftrightarrow & \textit{and} \\ \textit{linear sum} & \longleftrightarrow & \textit{or} \\ \textit{orthogonal complement} & \longleftrightarrow & \textit{not} \end{array}$$

Den Fokus lege ich vor allem auf Untersuchungen mathematischer Strukturen zur Darstellung logischer Strukturen. Insbesondere folgt daraus eine Interpretation der Orthomodularität als quantenmechanische Formulierung des klassischen *Satzes vom ausgeschlossenen Dritten*, und daraus wiederum ergibt sich eine Grundlage für die Eignung der Quantenlogik zur mathematischen Modellierung von Kommunikationsprozessen.

Aussagenlogik

Das philosophische und mathematische Forschungsgebiet der *Aussagenlogik* dient dem Aufdecken von Strukturen, die zwangsläufige Beziehungen zwischen den Wahrheitswerten von Aussagen und deren

Kombinationen beschreiben. Sinnvollerweise beschränkt man sich dabei zunächst auf solche Aussagen, denen man eindeutig einen *Wahrheitswert* „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann. Aus dieser Beschränkung ergeben sich die drei klassischen Gesetze, die meist auf Plato zurückgeführt werden:

Satz von der Identität: Jede Aussage impliziert sich selbst.

Satz vom Widerspruch: Keine Aussage kann gleichzeitig wahr und falsch sein.

Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Diese drei Gesetze gelten gleichermaßen in der klassischen Logik wie in der Quantenlogik. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass in der klassischen Sichtweise der Beobachter als Außenstehender Aussagen über die Welt macht, die sich dabei nicht ändert, während in der Quantenlogik jede Aussage über die Welt als Messung aufzufassen ist und den Zustand der Welt verändern kann. Diese Zustandsänderungen sind jedoch im Verhältnis zur Größe den untersuchten Objekten in vielen Fällen so geringfügig, dass die klassische Sichtweise eine vernünftige Approximation ist.

Aussagen und Propositionen

Um *Aussagen* mit Sachverhalten oder *Zuständen* der Welt in Verbindung zu bringen, ist es sinnvoll, ein mathematisches Modell zu verwenden. Abstrakt gesehen fokussiert man zunächst einen Ausschnitt der Wirklichkeit, ein *System* von möglichen Beobachtungen und vorgestellten Sachverhalten, und assoziiert zu diesem eine Menge Ω, die *Zustandsraum* genannt wird und als Elemente alle denkbaren *Systemzustände* enthält. Um rechnen zu können, ist es praktisch, die Menge Ω mit mathematischen Strukturen in Verbindung zu bringen, z. B. mit den *Zustandsräumen* der klassischen Physik oder der Quantenmechanik. Manchmal werden die Elemente von Ω als *mögliche Systemzustände* bezeichnet, obwohl sie mathematische Idealisierungen darstellen. Dabei wird explizit *nicht* vorausgesetzt, dass jeder *mögliche Systemzustand* auch tatsächlich physikalisch realisierbar ist.

Der Vorteil der Menge Ω ist eine mengentheoretische Beschreibung von Aussagen. Zu einer Aussage a nennt man die Menge derjenigen Systemzustände, in denen die Aussage a „wahr“ ist, die *Erfüllungsmenge* oder *Proposition* der Aussage a; ich bezeichne sie hier mit $E(a)$. Auf derartige *Propositionen* bezieht sich der Ausdruck “calculus of propositions” in [4, sec. 1].

Experimentell überprüfbare Aussagen

Zur logischen Analyse physikalischer Experimente ist es sinnvoll, Messungen zunächst als naturwissenschaftliche *Ja-Nein-Fragen* zu betrachten. *Experimentell überprüfbare Aussagen* sind nun solche, zu denen ein Messprozess existiert, der zu einer Entscheidung führt, ob die zu überprüfende Aussage „wahr“ oder „falsch“ ist. Prinzipiell ist nicht klar, ob *jede beliebige* Teilmenge des Zustandsraums die Erfüllungsmenge einer experimentell überprüfbaren Aussage ist.

Junktoren und Kombination von Wahrheitswerten

Üblicherweise bezeichnet man in der Logik die Wörter „und“ und „oder “ als *Junktoren* und bestimmt jeweils den Wahrheitswert von komplexeren Aussagen, die durch Verbindung zweier Aussagen a und b mit einem dieser Junktoren entstehen wie folgt:

„*a* und *b*“ ist genau dann „wahr“, wenn sowohl a als auch b „wahr“ ist,

„*a* oder *b*“ ist genau dann „wahr“, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen a, b „wahr“ ist.

Aus Sicht der Physik müssen diese Bestimmungen noch präzisiert werden. Tatsächlich muss man zumindest zwei verschiedene Arten von „und“ unterscheiden: das *gleichzeitige Und*, das nur bei identischen Zustandsräumen sinnvoll ist, und das *kombinatorische Und* zur Kombination mehrerer Zustandsräume.

1. Stufe: Klassische Physik

Im Aufsatz wird der Begriff *Phasenraum* als Gemeinsamkeit der klassischen Mechanik, der Elektrodynamik, und der Quantentheorie vorgestellt:

> There is one concept which quantum theory shares alike with classical mechanics and electrodynamics. This is the concept of a mathematical "phase-space." [4, sec. 3]

In der klassischen Mechanik betrachtet man *klassische Teilchen* und assoziiert zu jedem seine Ortskoordinaten sowie seinen Impuls- (oder Geschwindigkeits-)vektor, bei dreidimensionalen Koordnatensystemen sind das insgesamt sechs reelle Zahlen. Werden n Teilchen betrachtet, so ist deren Phasenraum in der Klassischen Mechanik also ein $6n$-dimensionaler reeller Vektorraum. Ein Punkt im Phasenraum entspricht in der klassischen Physik einem Zustand des betrachteten physikalischen Systems. Im Rahmen der klassischen Physik sind also die Begriffe *Phasenraum* und *Zustandsraum* gleichbedeutend.

Klassische Logik und Boole'sche Algebra

Angenommen, wir betrachten Billardkugeln, die sich auf einem Billardtisch befinden. Mögliche Systemzustände einer einzelnen Billardkugel bestehen aus zwei Koordinaten für den Ort auf dem Billardtisch und zwei weiteren Koordinaten für den Impuls der Billardkugel – hier genügt offenbar ein zweidimensionales Koordinatensystem. Als *Zustandsraum* Ω_1 für eine einzelne Billardkugel könnte ich also einen vierdimensionalen Vektorraum $\Omega_1 := \mathbb{R}^4$ wählen. Wenn ich jetzt ein System aus einer roten Billardkugel *und* einer blauen Billardkugel modellieren möchte, muss ich zur Beschreibung eines Zustands insgesamt *acht* Koordinaten vorsehen, ein sinnvoller Zustandsraum für zwei Billardkugeln ist also $\Omega_2 := \mathbb{R}^8 = \Omega_1 \times \Omega_1$. Sind nun zwei Aussagen a und b derart gegeben, dass sich Aussage a auf die rote und Aussage b auf die blaue Billardkugel bezieht, dann ist die Erfüllungsmenge der Aussage „a und b" im gemeinsamen Zustandsraum Ω_2 genau das *kartesische Produkt* der beiden einzelnen Erfüllungsmengen. Hier kommt das kartesische Produkt von Mengen zum Tragen, eine Interpretation des Ausdrucks "set product" in [4, sec. 1].

In einem *gemeinsamen* Zustandsraum entspricht dann auf der Ebene der Erfüllungsmengen das logische „und" dem mengentheoretischen Durchschnitt, während die Erfüllungsmenge einer Aussage der Form „a oder b" gleich der mengentheoretischen Vereinigung der Erfüllungsmengen $E(a)$ und $E(b)$ ist. Um eine Boole'sche Algebra zu erhalten, ist es notwendig, zu jeder Aussage a noch ihre *Negation* $\neg a$ mit der Erfüllungsmenge $E(\neg a) = \Omega \setminus E(a)$ hinzuzunehmen. Zusammen mit der logischen Implikation, die als Teilmengenbeziehung interpretiert und mit „$\subseteq$" bezeichnet wird, ergeben sich die folgenden Zuordnungen:

Klassische Physik

Aussagenlogik	Erfüllungsmengen	Description
a impliziert b	$E(a) \subseteq E(b)$	"subset relation"
a und b (kombinatorisch)	$E(a) \times E(b)$	"cartesian product"
a und b (gleichzeitig)	$E(a) \cap E(b)$	
a oder b	$E(a) \cup E(b)$	"set union"
nicht a	$\Omega \setminus E(a)$	"set complement"

Bezüge zur Philosophie

Die drei klassischen Gesetze der Logik können im Boole'schen Verband der Teilmengen eines gemeinsamen Zustandsraums Ω wie folgt durch für alle Aussagen a gültige Formeln ausgedrückt werden:

Klassische Gesetze der Logik im Teilmengenverband

Gesetz	stets gültige Formel
Satz von der Identität	$E(a) \subseteq E(a)$
Satz vom Widerspruch	$E(a) \cap \big(\Omega \setminus E(a)\big) = \varnothing$
Satz vom ausgeschlossenen Dritten	$E(a) \cup \big(\Omega \setminus E(a)\big) = \Omega$

Das zeigt zumindest, dass die klassische Logik nicht ganz unvernünftig ist. Ludwig Wittgenstein hat zu Beginn seines *Tractatus logico-philosophicus* die Weltsicht der klassischen Logik philosophisch auf den Punkt gebracht:

> *1.2 : Die Welt zerfällt in Tatsachen.*
>
> *1.21 : Eines kann der Fall sein oder nicht der Fall sein und alles übrige gleich bleiben.*

2. Stufe: Quantenmechanik

In den mathematischen Modellen zur Quantenmechanik ist der Phasenraum nicht nur viel größer, sondern muss auch anders interpretiert werden. Im Schrödingerbild besteht er aus allen nicht-normierten kollektiven Wellenfunktionen des betrachteten Ensembles. Im Heisenbergbild bilden alle möglichen Kombinationen von Zuständen der betrachteten Quantenteilchen eine Basis des Phasenraums. Von Neumann hatte in [15] gezeigt, dass diese beiden Bilder zu isomorphen Hilberträumen über den komplexen Zahlen führen – der Phasenraum hat in der Quantenmechanik also die mathematische Struktur eines komplexen Hilbertraums. Da die Anzahl der denkbaren Quantenzustände nicht beschränkt sein muss, kann der quantenmechanische Phasenraum unendlich-dimensional sein – und das ist auch häufig der Fall.

Ein anderer Unterschied zur klassischen Physik ist der, dass ein quantenmechanischer Zustand nur „bis auf Normierung“ einem Punkt im Phasenraum entspricht. Um aus einem Punkt im Phasenraum, also z. B. im Schrödingerbild einer nicht-normierten kollektiven Wellenfunktion, den zugehörigen quantenmechanischen Zustand zu ermitteln, muss man den Punkt zunächst auf die Sphäre projezieren, also die Wellenfunktion normieren, und dann auch noch linear abhängige Punkte der Sphäre (im Fall eines reellen Hilbertraums: antipodische Punkte) identifizieren. Die quantenmechanischen Zustände können daher als die Punkte eines *projektiven Raums* aufgefasst werden. Wählt man eine Basis im Hilbertraum, so werden die Hilbertraumkoordinaten zu *homogenen Koordinaten* des projektiven Raums. Diese enge Verbindung zwischen Quantenmechanik und projektiver Geometrie kommt im zweiten Hauptteil des betrachteten Artikels [4] zum Tragen und wird im Anhang desselben näher untersucht; sie ist der eigentliche Raison d'Être der Quantenlogik.

Propositionen in der Quantenmechanik

Sec. 4 setzt den Phasenraum mit "experimental propositions" – auf Deutsch etwa „Proposition einer experimentell überprüfbaren Aussage“ – in Beziehung. Zur Analyse experimentell überprüfbarer Aussagen in der Quantenmechanik begründen die Autoren in Sec. 6 – unter Bezugnahme auf [15] –, dass jede physikalische Messung einer (bzgl. des Skalarprodukts im Hilbertraum) *orthogonalen Projektion* auf einen *linearen Unterraum* des Phasenraums entspricht (also einer Reduktion der Freiheitsgrade). Nun geht in der Quantenmechanik der *Zustandsraum* als projektiver Raum aus dem *Phasenraum* dadurch hervor, dass jeder eindimensionale lineare Unterraum des Phasenraums einem Punkt im Zustandsraum entspricht – also durch eine algebraische Quotientenbildung. Üblicherweise nennt man eine Teilmenge eines projektiven Raums eine *Linearmenge*, wenn sie mit zwei Punkten auch die durch diese zwei Punkte bestimmte Gerade enthält. Daraus folgt, dass jeder Linearmenge im Zustandsraum genau ein linearer Unterraum des Phasenraums entspricht, und umgekehrt.

Dem Sprachgebrauch im Artikel [4] folgend, bietet es sich an, die *Proposition* einer Aussage als Teilmenge des Phasenraums zu betrachten. Das ermöglicht eine Unterscheidung von der *Erfüllungsmenge*, die weiterhin als Teilmenge des Zustandsraums betrachtet wird. Die "experimental proposition" einer Aussage a ist damit ein linearer Unterraum $P(a)$ des Phasenraums, und jede Erfüllungsmenge $E(a)$ ist eine Linearmenge im Zustandsraum. Die spezielle Form dieser Assoziation erlaubt es, logische Eigenschaften der experimentell überprüfbaren Aussagen in geometrischen Eigenschaften der "experimental propositions" wieder zu finden:

1. Eine Aussage a ist genau dann logisch äquivalent zur logischen Negation einer Aussage b, wenn $P(b)$ das durch die Hilbertraumstruktur festgelegte orthogonale Komplement von $P(a)$ ist.
2. Eine Aussage a ist genau dann eine logische Folge einer Aussage b, wenn $P(b)$ eine Teilmenge von $P(a)$ ist.

Quantenlogik und orthokomplementierte Verbände

Der zweite Hauptteil des Artikels [4] fußt auf Arbeiten zur Verbindung von Verbandstheorie mit projektiver Geometrie von Garrett Birkhoff [2, 3]. In vorliegendem Aufsatz wird die mathematische Struktur *Verband* erweitert, indem eine als "complementation" bezeichnete Operation hinzugefügt und zusätzlich die Gültigkeit eines "modular law" gefordert wird, wobei letzteres sich im Nachhinein als problematisch erweisen wird.

Doch nun zum Konkreten. In sec. 7 "Implication as partial ordering" wird der Begriff der *partiellen Ordnung* wie in der Mathematik auch heute noch üblich definiert, nämlich als zweistellige Relation auf der Menge der Propositionen mit drei Eigenschaften. Im Folgenden notiere ich diese Relation mit $\subseteq$ (in [4] wird ein fett gedrucktes „$\subset$" verwendet) und füge übliche Bezeichnungen für die Eigenschaften kursiv in Klammern am Ende der Zeile hinzu:

S1: $x \subseteq x$. *(Reflexivität)*

S2: Wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq z$, dann $x \subseteq z$. *(Transitivität)*

S3: Wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$, dann sind x und y logisch äquivalent. *(Antisymmetrie)*

Hinzu kommt, eingeleitet mit den Worten "It does not seem excessive to require ...", die Forderung nach Existenz zweier spezieller Propositionen $\circledcirc$, der *Nullaussage* oder *Kontradiktion*, und $\square$, der *Einsaussage* oder *Tautologie*, mit den Eigenschaften

S4: $\circledcirc \subseteq x \subseteq \square$ für alle x. *(Beschränktheit nach unten und oben)*

Anschließend, in sec. 8, definieren die Autoren einen *Verband* als ein "partially ordered system," in dem zu je zwei Elementen deren *Infimum* und deren *Supremum* existieren. Dabei ist für zwei Aussagen ihr *Infimum* die stärkste Aussage, die beide impliziert, und ihr *Supremum* ist die schwächste Aussage, die von beiden impliziert wird. In der Verbandstheorie wird das Infimum häufig *Meet* („Zusammentreffen") genannt, und das Supremum heißt *Join* („Verbindung"). Formelmäßig notieren die Autoren das Infimum von a und b mit $a \bigcap b$, und deren Supremum mit $a \bigcup b$. Das erinnert zwar an die Mengenlehre, ist aber hier wie beschrieben bzgl. Implikationen zu verstehen.

In sec. 9 führen die Autoren einen neuen Begriff ein, die "complementation". Diese ist eine Operation, die jeder Aussage a ihre *Negation* oder ihr *Komplement* a' zuordnet. Birkhoff und von Neumann fordern vom Komplement genau die drei Eigenschaften, die im Fall des Komplements in einer Boole'schen Algebra jedenfalls erfüllt sind:

L71: $(a')' = a$. *(Involutivität)*

L72: $a \bigcap a' = \circledcirc$ und $a \bigcup a' = \square$. *(Komplementarität)*

L73: $a \subseteq b$ impliziert $b' \subseteq a'$. *(logisches Prinzip der Kontraposition)*

Die Nummerierung ist aus heutiger Sicht seltsam, findet sich aber so in [4]. Die richtige Lesart z. B. für „L71" wäre „Law 7.1", und so fort. Nach heutiger Terminologie nennt man ein Element b eines Verbands ein *Komplement* zu a, wenn $a \bigcap b = \circledcirc$ und $a \bigcup b = \square$ gelten. Eine auf einem Verband definierte Abbildung $a \mapsto a'$, die alle drei Bedingungen L71, L72 und L73 erfüllt, nennt man heute *Orthokomplementierung*.

Zuordnungen in der Quantenmechanik

> „Die Quantentheorie kann charakterisiert werden als die Physik der Beziehungen und der Möglichkeiten." [7, S. 384]

Wie in der klassischen Physik kann man auch in der Quantenmechanik logische Beziehungen zwischen experimentell überprüfbaren Aussagen mit mathematischen Strukturen auf den zugehörigen *Propositionen* in Verbindung bringen. Die Entsprechungen der *logischen Implikation* und des *gleichzeitigen Und* können für die Quantenmechanik aus der klassischen Physik unverändert übernommen werden. Neu interpretiert werden müssen das *kombinatorische Und*, das *Oder* und die *logische Negation*.

Die *logische Negation* einer Proposition der Quantenmechanik wird als deren *orthogonales Komplement* definiert. Für diese Definition wird das *Skalarprodukt* im Phasenraum benötigt; hierfür wird als die mathematische Struktur *Hilbertraum* verwendet. Die orthogonale Komplementierung passt gut zur Verbandsstruktur der linearen Unterräume, denn sie assoziiert zu jedem linearen Unterraum U einen anderen linearen Unterraum $U^{\perp}$ und erfüllt die Bedingungen L71, L72 und L73.

Das *logische Oder* zweier quantenmechanischer Propositionen $P(a)$ und $P(b)$ wird als *Join* $P(a) \bigcup P(b)$ im Verband der linearen Unterräume definiert. Gemäß der Definition des Join als *Infimum bzgl. der Implikation* ist er der kleinste lineare Unterraum, der sowohl $P(a)$ als auch $P(b)$ enthält. Daraus folgt die Gleichung

$$P(a) \bigcup P(b) = P(a) + P(b),$$

das *logische Oder* zweier Aussagen entspricht also der *linearen Summe* ihrer Propositionen – im *Verband der linearen Unterräume* wohlgemerkt. Hierzu zwei Bemerkungen:

(1) Die lineare Summe enthält nicht nur die beiden linearen Unterräume, sondern auch alle *Superpositionen*, die sich daraus bilden lassen.

(2) Im Zusammenhang mit obiger Gleichung gibt es ein wissenschaftshistorisch wichtiges Problem, das weiter unten in „Stufe 3“ beschrieben wird.

Am deutlichsten unterscheidet sich das *kombinatorische Und* der Quantenmechanik von seinem Pendant aus der klassischen Physik. Man nimmt hier das algebraische *Tensorprodukt* zweier Propositionen, bei dem sowohl die mathematische Konstruktion als auch die naturwissenschaftliche Interpretation interessant ist.

Zur mathematischen Konstruktion stellt man sich vor, dass zwei Teilsysteme durch *Schrödinger'sche Wellenfunktionen* $\psi_1(x)$ und $\psi_2(y)$ beschrieben werden, und dass deren Kombination zu einer *kollektiven Wellenfunktion* $\psi_3(x, y)$ führt. Mit recht aufwändiger Mathematik kann man beweisen, dass jede mögliche kollektive Wellenfunktion durch *Linearkombinationen* von Produkten einfacher Wellenfunktionen beliebig genau approximierbar ist (bzgl. der L^2-Norm). Hierbei benutzt man, dass jede Wellenfunktion (L^2-Funktion) sich als Linearkombination von *Aufbaufunktionen*, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, darstellen lässt. Eine derartige Familie von Aufbaufunktionen nennt man eine *orthonormale Schauderbasis*. Hat man nun für jede der beiden linearen Unterräume $P(a)$ und $P(b)$ eine orthonormale Schauderbasis, so erhält man eine orthonormale Schauderbasis des Tensorprodukts $P(a) \otimes P(b)$, indem man jedes Element der Schauderbasis von $P(a)$ mit jedem Element der Schauderbasis von $P(b)$ multipliziert.

Ein Unterschied zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Interpretation des *kombinatorischen Und* ist die Berechnung der Dimension der kombinierten Phasenraums. Kombiniert man einen klassischen Phasenraum mit Dimension r mit einem mit Dimension s, so ist die Dimension des kombinierten Phasenraums die *Summe:* $r + s$. Kombiniert man jedoch zwei quantenmechanische Phasenräume mit Dimensionen r und s, so ist die Dimension des kombinierten Phasenraums das *Produkt:* $r \cdot s$.

Die algebraische Konstruktion führt zu folgender naturwissenschaftlichen Interpretation: Jedes Element einer Schauderbasis korrespondiert zu einem möglichen *Zustand* des quantenmechanischen Systems. Das Tensorprodukt zweier Systeme wird also aus allen *Kombinationen* von möglichen Zuständen der beiden Systeme aufgebaut, es repräsentiert also alle möglichen *Beziehungen* zwischen den beiden Systemen.

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Tabelle der Zuordnungen:

Quantenmechanik

Aussagenlogik	Propositionen	Description
a impliziert b	$P(a) \subseteq P(b)$	“subset relation”
a und b (kombinatorisch)	$P(a) \otimes P(b)$	“tensor product”
a und b (gleichzeitig)	$P(a) \bigcap P(b) = P(a) \cap P(b)$	“Meet” = “set intersection”
a oder b	$P(a) \bigcup P(b) = P(a) + P(b)$	“Join” = “linear sum”
nicht a	$P(a)^{\perp}$	“orthogonal complement”

Das Modulgesetz

Die beiden zweistelligen Verknüpfungen der klassischen Boole'schen Algebra erfüllen *Distributivgesetze*. Birkhoff und von Neumann schreiben diese mit den verbandstheoretischen Zeichen $\bigcap$ für *meet*, also *gleichzeitigem Und*, und $\bigcup$ für *join*, also *Oder*, in [4, sec. 10] wie folgt auf:

L6: $a \bigcup (b \bigcap c) = (a \bigcup b) \bigcap (a \bigcup c)$ und $a \bigcap (b \bigcup c) = (a \bigcap b) \bigcup (a \bigcap c)$.
(Distributivgesetze)

Zwei Seiten weiter, in Sec. 11, folgt:

L5: Wenn $a \subseteq c$, dann gilt $a \bigcup (b \bigcap c) = (a \bigcup b) \bigcap c$. *(Modulgesetz)*

Die Bezeichnung *Modulgesetz* geht auf Richard Dedekind zurück, der sie 1897 einführte, siehe [6, S. 115]. Das *Modulgesetz* folgt logisch aus den Distributivgesetzen, ist aber schwächer als diese. In [4] wird die Bezeichnung "modular identity" verwendet; anschließend wird eine graphische Charakterisierung modularer Verbände präsentiert [4, sec. 10] und auf Dedekind [6, S. 255] zurückgeführt.

Mit Mitteln der linearen Algebra kann man recht leicht beweisen, dass der Verband der linearen Unterräume eines Vektorraums *modular* ist, d. h., das *Modulgesetz* erfüllt, nicht aber das Distributivgesetz (siehe Anhang).

3. Stufe: Eine mathematische Feinheit

Hier kommt eine mathematische Feinheit zum Tragen, die für die Entwicklung der Quantenlogik weit reichende Folgen haben sollte: Das Bild eines orthogonalen Projektors im Hilbertraum ist stets ein *abgeschlossener* linearer Unterraum. Das liegt daran, dass jeder orthogonale Projektor im Hilbertraum beschränkt ist, also auch stetig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Metrik. Wegen der Stetigkeit muss jedenfalls der Grenzwert einer konvergenten Folge von Fixpunkten wieder ein Fixpunkt sein. Da das Bild eines orthogonalen Projektors genau aus seinen Fixpunkten besteht, ist es also topologisch abgeschlossen.

Ist der zu Grunde liegende Vektorraum unendlich-dimensional, dann ist die Summe zweier abgeschlossener linearer Unterräume zwar immer noch ein linearer Unterraum, aber nicht notwendig abgeschlossen. Aber eine quantenmechanische Messung entspricht einem *orthogonalen Projektor*, also einen *abgeschlossenen linearen Unterraum*. Im Verband der quantenmechanischen Messungen a und b ist also der *Join* der Unterräume $P(a)$ und $P(b)$ gleich dem *algebraischen* und auch gleich dem *topologischen Abschluss der Summe*:

$$P(a) \bigcup P(b) = (P(a) + P(b))^{\perp\perp} = \overline{P(a) + P(b)}.$$

Wie von Neumann in einem Brief an Birkhoff im November 1935, siehe [12, p. 111], bereits bemerkte, führt das zu einer Verletzung des Modulgesetzes. Der Verband der *abgeschlossenen linearen Unterräume* eines unendlich-dimensionalen Hilbertraums ist also nicht modular. Man kann allgemein zeigen, dass ein Hilbertraum genau dann endlich-dimensional ist, wenn der Verband seiner abgeschlossenen linearen Unterräume modular ist [11, Prop. 4.3 and 4.4].

Für von Neumann glich dies einem Todesstoß für das Hilbertraummodell der Quantenmechanik, da gewisse in [4] nicht ausgeführte wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen *implizieren*, dass der Verband der Messungen modular sein muss, siehe [11, chap. 7] für eine detaillierte Beschreibung.

Orthomodularität

Es gibt einen aus logischer Sicht recht interessanten Ersatz für das Modulgesetz. Der erste Schritt gelang Kodi Husimi bereits 1937 [9, p. 780]. Er fand, dass für quantenmechanische Observable die folgende Abschwächung des Modulgesetzes erfüllt ist:

OM: Wenn $A \subseteq C$, dann gilt $A \bigcup \left(A^{\perp} \bigcap C\right) = C$. *(Orthomodulargesetz)*

Algebraisch ausgedrückt: Bezeichne zunächst $\mathcal{H}$ einen *separablen* Hilbertraum – d. h., $\mathcal{H}$ besitzt eine abzählbare Schauderbasis, und nur solche Hilberträume kommen für quantenmechanische Berechnungen in Frage –, dann erfüllt der orthokomplementierter Verband $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ der abgeschlossenen linearen Unterräume von $\mathcal{H}$ das Orthomodulargesetz.

Das Verhältnis der drei Gesetze ist wie folgt:

$$\text{Distributivgesetz} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{Modulgesetz} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{Orthomodulargesetz}$$

Setzt man im Orthomodulargesetz $C := \mathcal{H}$, dann erhält man $A \bigcup A^{\perp} = \mathcal{H}$, was die folgende Tabelle vervollständigt:

Klassische Gesetze der Logik im Hilbertverband

Gesetz	stets gültige Formel
Satz von der Identität	$P(a) \subseteq P(a)$
Satz vom Widerspruch	$P(a) \bigcap P(a)^{\perp} = \{0\}$
Satz vom ausgeschlossenen Dritten	$P(a) \bigcup P(a)^{\perp} = \mathcal{H}$

Interessanterweise gibt es eine teilweise Umkehrung der Beobachtung von Husimi: In ihrer 22-seitigen Doktorarbeit [14] fand Maria Pia Solèr eine Bedingung, die heute so genannten *Solèr-Bedingung*, unter der ein orthomodularer Raum bereits ein klassischer Hilbertraum ist, siehe Anhang für eine genauer Beschreibung.

Dem Satz von Solèr widmete Samuel Holland einen längeren Artikel [8], in dem er diesen in den Rahmen eines Aufbaus der Quantenmechanik aus Axiomen und der projektiven Geometrie stellt. Er untersucht projektive “geometry-with-polarity” [8, p. 214f], wobei er den Begriff “polarity” in einem projektiven Raum auf einen Vorschlag von Garrett Birkhoff aus dem Jahr 1964 zurückführt, und zeigt, dass ein in der projektiven Geometrie formuliertes Orthomodulargesetz im wesentlichen äquivalent zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten für abgeschlossene Linearmengen ist, vgl. [8, Lemma 3.3]. Außerdem gelingt ihm die Formulierung einer Bedingung, die – im Rahmen der Holland’schen Axiomatik der Quantentheorie – ohne explizite Unendlichkeit auskommt und zur *Solèr-Bedingung* äquivalent ist, nämlich der “ample unitary group”-Bedingung [8, Axiom D, p. 232].

Wozu braucht man Quantenlogik?

Gemäß der *Kopenhagener Deutung* der Quantenmechanik müsste man streng zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik unterscheiden. Sämtliche Experimente und Messungen finden im Rahmen der klassischen Physik statt, während manche seltsame mikroskopische Teilchen sich durch Schrödinger’sche Wellenfunktionen beschreiben lassen und dementsprechend seltsames Verhalten an den Tag legen. Aus naturwissenschaftlicher Sicht ist die Kopenhagener Deutung daher zumindest unbefriedigend. Hierzu ein Zitat von Peter Mittelstaedt (1929–2014) aus dem Jahr 2005:

> *In contrast to the Copenhagen interpretation we consider quantum mechanics as universally valid and query whether classical physics is really intuitive and plausible. We discuss these problems within the quantum logic approach to quantum mechanics [...] and conclude that quantum mechanics is more intuitive than classical mechanics and that classical mechanics is not the macroscopic limit of quantum mechanics.* [10]

Neben dieser theoretischen Begründung gibt es auch noch einen praktischen Grund, die Quantenlogik bei der mathematischen Modellierung von Kommunikationsprozessen der klassischen Logik vorzuziehen. Dieser wird klar, wenn man sich den *quantenmechanischen Messprozess* genauer anschaut:

- In der Quantenlogik ist jede *Aussage a* als eine *Messung* zu interpretieren, deren Resultat eine *ja/nein* Entscheidung ist.
- Nach von Neumann entspricht eine Messung einem *orthogonalen Projektor* des Hilbertraums $\mathcal{H}$ auf einen *linearen Teilraum* $P(a) \subseteq \mathcal{H}$.

- Eine Wellenfunktion $\psi \in \mathcal{H}$ wird bei der Messung *zerlegt*

$$\psi = \psi_a + \psi'_a \qquad \text{mit } \psi_a \in P(a) \text{ und } \psi'_a \in P(a)^\perp$$

- Nach der Messung ist nur noch eine Komponente übrig;

$$\psi_a \in P(a) \text{ im Fall „}\textit{ja,}\text{“} \qquad \psi'_a \in P(a)^\perp \text{ im Fall „}\textit{nein.}\text{“}$$

- Bei vielen Messungen in Situationen, die mit der gleichen Wellenfunktion ψ modelliert werden, entsprechen im Fall $\|\psi\|^2 = 1$ die Normquadrate $\|\psi_a\|^2$ und $\|\psi'_a\|^2$ den *Projektionswahrscheinlichkeiten.*

Die Quantenlogik modelliert also den Sachverhalt, dass jede *Aussage* mit dem System, auf das sich die Aussage bezieht, interagiert und das System verändern kann. Genau dies spielt bei Kommunikationsprozessen eine entscheidende Rolle. Die Quantenlogik liefert ein mathematisches Werkzeug, derartige Prozesse präziser zu analysieren, als es die klassische Logik könnte.

Anhang

Algebraische Definition „Verband“

Birkhoff und von Neumann stellen nach ihrer Definition des Begriffs „Verband“ fest, dass in jedem Verband die folgenden Gesetze gelten:

L1: $a \bigcap a = a$ und $a \bigcup a = a$. *(Idempotenzgesetze)*

L2: $a \bigcap b = b \bigcap a$ und $a \bigcup b = b \bigcup a$. *(Kommutativgesetze)*

L3: $a \bigcap (b \bigcap c) = (a \bigcap b) \bigcap c$ und $a \bigcup (b \bigcup c) = (a \bigcup b) \bigcup c$. *(Assoziativgesetze)*

L4: $a \bigcup (a \bigcap b) = a \bigcap (a \bigcup b) = a$. *(Absorptionsgesetze)*

Man kann einen *Verband* auch als algebraische Struktur mit zwei zweistelligen Verknüpfungen $\bigcap$ und $\bigcup$, die die Axiome L1–L4 erfüllen, definieren. Die partielle Ordnung ergibt sich dann aus den Äquivalenzen

$$a \subseteq b \quad \Leftrightarrow \quad a \bigcap b = a \quad \Leftrightarrow \quad a \bigcup b = b$$

Der modulare Verband der linearen Unterräume

Die linearen Unterräume eines beliebigen Vektorraums bilden einen Verband, denn sie sind durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ partiell geordnet, das *Infimum* zweier linearer Unterräume ist deren mengentheoreitischer Durchschnitt, und ihr *Supremum* ist ihre lineare Summe. Des weiteren ist dieser Verband durch den *Nullraum* $\{0\}$ nach unten und durch den gesamten Vektorraum nach oben beschränkt.

Zum Beweis des Modulgesetzes seien lineare Unterräume A, B und C mit $A \subseteq C$ gegeben.

$A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap C$**:** Ist $x \in A + (B \cap C)$, dann ist $x = x_A + x_{BC}$ für Vektoren $x_A \in A \subseteq A + B$ und $x_{BC} \in B \cap C \subseteq C$, also auch $x \in (a + b) \cap C$.

$A + (B \cap C) \supseteq (A + B) \cap C$**:** Ist umgekehrt $x \in (A + B) \cap C$, dann gibt es $x_A \in A$ und $x_B \in B$ mit $x = x_A + x_B \in C$. Wegen $A \subseteq C$ folgt daraus $x_B \in C$, also auch $x_B \in B \cap C$, was zu zeigen war.

Gegenbeispiel: Verband von linearen Unterräumen verletzt Distributivgesetz

Andererseits ist das Distributivgesetz bereits in einem zweidimensionalen Vektorraum nicht erfüllt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$a = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\; b = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\; c = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad (a+b) \cap c = c \neq \mathbf{0} = (a \cap c) + (b \cap c).$$

Allgemein ist das Distributivgesetz in einem Teilverband eines Untervektorraumverbands genau dann erfüllt, wenn es eine Orthonormalbasis derart gibt, dass jedes Element des Teilverbands von einer Teilmenge der Orthonormalbasis erzeugt ist.

Gegenbeispiel: Nicht abgeschlossene lineare Summe

Wir betrachten im Hilbertraum der quadratsummierbaren reellen Folgen, $\ell^2(\mathbb{R})$, zunächst die abgeschlossenen Unterräume

$$\mathcal{U} := \{\vec{e}_{2n} : n \in \mathbb{N}_0\}^{\perp\perp} \quad \text{und} \quad \mathcal{V} := \left\{\vec{e}_{2n} + \frac{1}{n}\,\vec{e}_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}^{\perp\perp}.$$

Daraus folgen die Beschreibungen

$$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \vec{e}_{2n} :\; \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum \lambda_n^2 < \infty \right\} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{V} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(\vec{e}_{2n} + \frac{1}{n}\,\vec{e}_{2n+1} \right) :\; \mu_n \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum \mu_n^2 < \infty \right\}.$$

Es gilt nun für jede natürliche Zahl N:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,\vec{e}_{2n+1} \quad \in \quad \mathcal{U} + \mathcal{V},$$

denn diese Partialsumme lässt sich als Summe eines Vektors aus $\mathcal{U}$ und eines Vektors aus $\mathcal{V}$ darstellen, indem man die Koeffizienten λ_n und μ_n wie folgt bestimmt:

$$\lambda_n := \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leqslant n \leqslant N, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \mu_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leqslant n \leqslant N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weil die Folge der Koeffizienten $\frac{1}{n}$ quadratsummierbar ist, gilt für den Grenzwert jedenfalls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\vec{e}_{2n+1} \quad \in \quad (\mathcal{U} + \mathcal{V})^{\perp\perp}.$$

Wollte man aber diesen Grenzwert als Summe eines Vektors aus $\mathcal{U}$ und eines Vektors aus $\mathcal{V}$ schreiben, müsste man die Koeffizienten wie folgt wählen:

$$\lambda_n := \begin{cases} -1 & \text{falls } n \geqslant 1, \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases} \qquad \mu_n := 1 \text{ für alle } n \geqslant 1,$$

und diese Koeffizientenfolgen sind nicht quadratsummierbar. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\vec{e}_{2n+1} \quad \notin \quad \mathcal{U} + \mathcal{V},$$

daher ist $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ nicht abgeschlossen.

Der Satz von Solèr

Weil das so schön ist, beschreibe ich Solèr's Hauptresultat in ihrer eigenen Notation, die allerdings kaum von der in der Fachwelt üblichen abweicht. Sie startet mit einem „nicht notwendigerweise kommutativen **Körper**“ mit Charakteristik $\neq 2$ und einem Antiautomorphismus $\bar{\cdot} : K \to K$. Über diesem betrachtet sie einen „**unendlichdimensionalen Vektorraum** E“, der mit einer „**Hermite'schen Form** $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to K$“ versehen ist. Die grundlegenden Begriffe definiert sie wie folgt [14, S. 2f.]:

> $\langle x, x \rangle$ kürzen wir ab mit $\langle x \rangle$. $\langle x \rangle$ heisst **Länge** von x.
>
> Eine Teilmenge $(f_\iota)_{\iota \in I}$ heisst **Orthogonalsystem**, falls $\langle f_\iota, f_\kappa \rangle = 0$ $(\iota \neq \kappa)$ und $\langle f_\iota \rangle \neq 0$ für alle $\iota, \kappa \in I$. Gilt zusätzlich $\langle f_\iota \rangle = \gamma$ für alle $\iota \in I$ und ein $\gamma \in K$, so nennen wir $(f_\iota)_{\iota \in I}$ ein **γ-Orthogonalsystem**.
>
> [...]
>
> **Definition**
>
> $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst **orthomodular**, falls gilt
>
> (1) $$X = X^{\perp\perp} \Longrightarrow E = X \oplus X^{\perp}$$
>
> für alle linearen Teilräume $X \subset E$.
>
> $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst **halbnormal**, falls $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ orthomodular ist und ein γ-Orthogonalsystem $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$ besitzt.
>
> $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst **normal**, falls $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ halbnormal ist und (2) erfüllt:
>
> (2) $$E = ((c_i)_{i \in \mathbb{N}})^{\perp\perp}$$

Das zweite Kapitel ihrer Dissertation beginnt auf Seite 4 mit den Worten:

> Zuerst betrachten wir normale Räume und zeigen, dass die klassischen Hilberträume $\ell_2(\mathbb{R})$, $\ell_2(\mathbb{C})$ und $\ell_2(\mathbb{H})$ die einzigen solchen sind. Daraus folgern wir dann die Nichtexistenz nichtklassischer halbnormaler Räume.

Es endet auf Seite 19 mit dem Beweis des Hauptresultats:

> **Satz 3**
>
> *Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein halbnormaler Vektorraum über dem Körper K.*
>
> *Dann ist $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ und E ist ein klassischer Hilbertraum.*

Dabei werden wie üblich mit $\mathbb{R}$ die *reellen Zahlen*, mit $\mathbb{C}$ die *komplexen Zahlen* und mit $\mathbb{H}$ der nichtkommutative Körper der *Quaternionen* bezeichnet; letztere erhalten den Buchstaben $\mathbb{H}$, weil sie auf William Rowan Hamilton (1805–1865) zurückgehen. Bemerkenswert ist, dass nicht vorausgesetzt wird, dass das γ-Orthogonalsystem $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$ irgendeine Bedingung zur Vollständigkeit erfüllt – es genügt, dass es *unendlich viele Vektoren* enthält.

Literatur

[1] AERTS, Diederik: Quantum structure in cognition. In: *Journal of Mathematical Psychology* 53 (2009), S. 314–348

[2] BIRKHOFF, Garrett: On the combination of subalgebras. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 29 (1933), Nr. 4, S. 441–464. `http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100011464`. – DOI 10.1017/S0305004100011464

[3] BIRKHOFF, Garrett: Combinatorial Relations in Projective Geometries. In: *Annals of Mathematics* 36 (1935), Nr. 3, 743-748. `http://www.jstor.org/stable/1968656`. – ISSN 0003486X

[4] BIRKHOFF, Garrett ; VON NEUMANN, John: The Logic of Quantum Mechanics. In: *Annals of Mathematics* 37 (1936), Nr. 4, 823-843. `http://www.jstor.org/stable/1968621`. – ISSN 0003486X

[5] BLUTNER, Reinhard ; GRABEN, Peter beim: Quantum cognition and bounded rationality. In: *Synthese* 193 (2016), Oct, Nr. 10, 3239–3291. http://dx.doi.org/10.1007/s11229-015-0928-5. – DOI 10.1007/s11229–015–0928–5. – ISSN 1573–0964

[6] DEDEKIND, Richard: Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. In: FRICKE, Robert (Hrsg.) ; NOETHER, Emmy (Hrsg.) ; ORE Öystein (Hrsg.): *Gesammelte mathematische Werke* Bd. 2. Braunschweig : Vieweg, 1931, S. 103–147. – „Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte."

[7] GÖRNITZ, Thomas ; GÖRNITZ, Brigitte: *Quantenphysik und Bewusstsein*. Springer, 2016

[8] HOLLAND, Samuel: Orthomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 32 (1995), Nr. 2, S. 205–234

[9] HUSIMI, Kodi: Studies on the foundations of quantum mechanics I. In: *Proceedings of the Physico-Mathematical Society Japan* 19 (1937), S. 766–778

[10] MITTELSTAEDT, Peter: Quantum Physics and Classical Physics—In the Light of Quantum Logic. In: *International Journal of Theoretical Physics* 44 (2005), Jul, Nr. 7, 771–781. http://dx.doi.org/10.1007/s10773-005-7055-x. – DOI 10.1007/s10773–005–7055–x. – ISSN 1572–9575

[11] RÉDEI, Miklós: *Quantum Logic in Algebraic Approach*. Kluwer Academic Publisher, 1998. – ISBN 0–7923–4903–2

[12] RÉDEI, Miklós: The birth of quantum logic. In: *History and Philosophy of Logic* 28 (2007), Nr. 2, 107–122. http://dx.doi.org/10.1080/01445340601113955. – DOI 10.1080/01445340601113955

[13] SCHMITT, I. ; ROMER, R. ; WIRSCHING, G. ; WOLFF, M.: Denormalized quantum density operators for encoding semantic uncertainty in cognitive agents. In: *2017 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom)*, 2017, S. 165–170

[14] SOLÈR, Maria P.: *Charakterisierung von Hilberträumen als spezielle orthomodulare Räume*. Diss. Univ. Zürich, 1994. – 22 Seiten S.

[15] VON NEUMANN, John: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1981. – Repr. d. Ausg. 1932